Optica

Smvt - Peremans

Trillingen

1. Eenparige harmonische beweging

Trilling =een ladingsdeeltje beweegt herhaaldelijk heen en weer over de oorsprong van een x-as.
Frequentie f = aantal trillingen per seconde (SI eenheid = Hertz (Hz)

$$Hz = trilling\ per\ seconde = \frac{1}{s}$$

Periode T = duur tijd van één trilling (seconden per trilling)

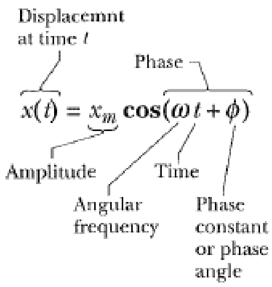
$$T = \frac{1}{f}$$

Periodieke beweging / harmonische beweging = een beweging die zich op een bepaalde manier herhaalt.

Een harmonische beweging waarbij de afwijking t.o.v. de x-as zich in de tijd verhoudt volgens:

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

noemt men een eenparige harmonische trilling: de massadeeltjes volgen een sinusoïde curve in de tijd.



- X_m: **amplitude**
  Maximale uitwijking van het massadeeltje t.o.v. de x-as.
  De cosinusfunctie varieert tussen $[-1,1]$, dus de uitwijking varieert tussen $\pm X_m$
- $(\omega t + \phi)$: **fase**
  Het deel van de vergelijking dat varieert in de tijd
  - ϕ: **faseconstante / fase hoek**
    Deze is afhankelijk van de snelheid en positie van het deeltje op $t = 0$
  - ω: **hoekfrequentie / hoeksnelheid**
    Na één periode T moet de uitwijking $x(t)$ terug op zijn beginpositie vallen.
    M.a.w. (veronderstel $\phi = 0$):

$$x(t) = x(t+T) \Leftrightarrow X_m \cos(\omega t) = X_m \cos\big(\omega(t+T)\big) \Leftrightarrow cos(\omega t) = \cos\big(\omega(t+T)\big)$$

$$\Leftrightarrow \omega t + 2\pi = \omega(t+T) \Leftrightarrow \omega t + 2\pi = \omega t + \omega T \Leftrightarrow \omega T = 2\pi \Leftrightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

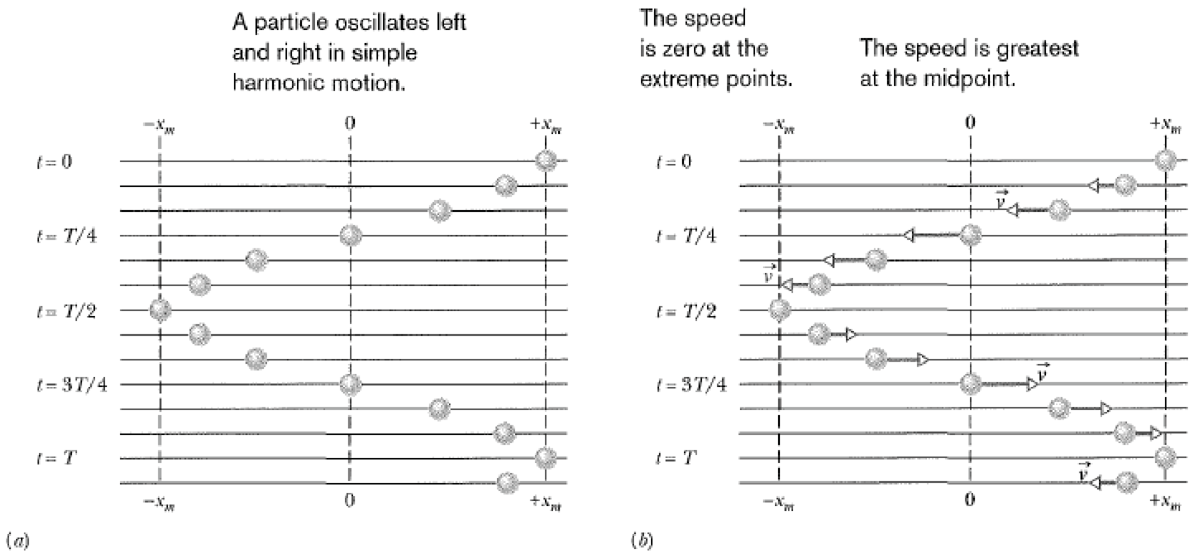
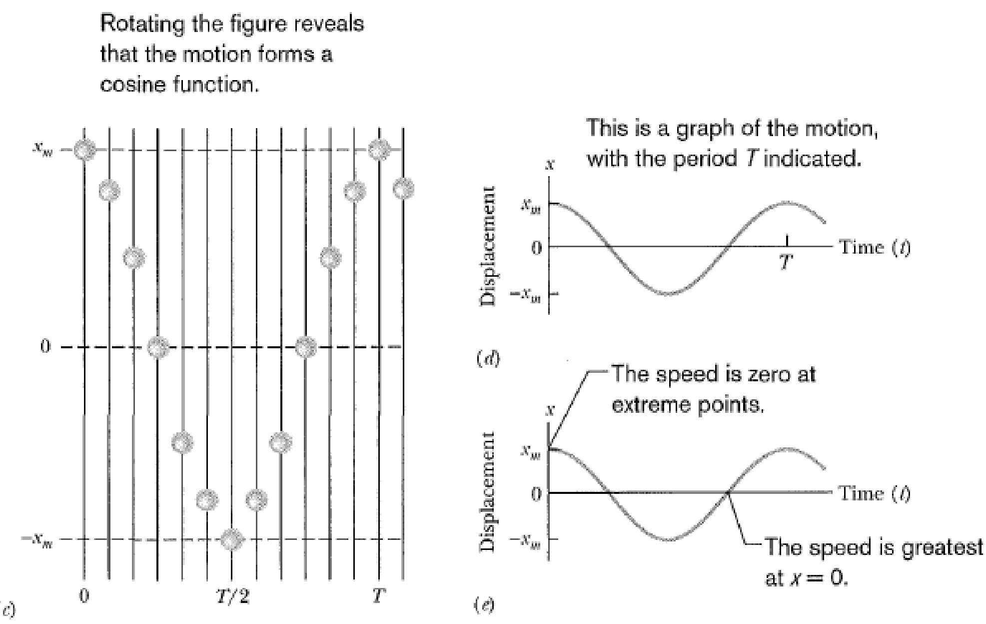


Fig. 15-1 (a) A sequence of "snapshots" (taken at equal time intervals) showing the position of a particle as it oscillates back and forth about the origin of an x axis, between the limits $+x_m$ and $-x_m$. (b) The vector arrows are scaled to indicate the speed of the particle. The speed is maximum when the particle is at the origin and zero when it is at $\pm x_m$. If the time t is chosen to be zero when the particle is at $+x_m$, then the particle returns to $+x_m$ at $t = T$, where T is the period of the motion. The motion is then repeated. (c) Rotating the figure reveals the motion forms a cosine function of time, as shown in (d). (e) The speed (the slope) changes.



1.1. De snelheid van een EHB

Herinner dat: $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, we krijgen dus:

$$v(t) = -\omega X_m \sin(\omega t + \phi)$$

Dit houdt in dat de snelheid fluctueert tussen $\mp\omega X_m$ en dat als de uitwijking maximaal is, de snelheid minimaal is en als de uitwijking nul is, de snelheid maximaal is.

1.2. De versnelling van een EHB

Herinner dat: $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$, we krijgen dus:

$$a(t) = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow a(t) = -\omega^2 x(t)$$

In de EHB is de versnelling proportioneel aan de uitwijking, maar tegengesteld in zin.

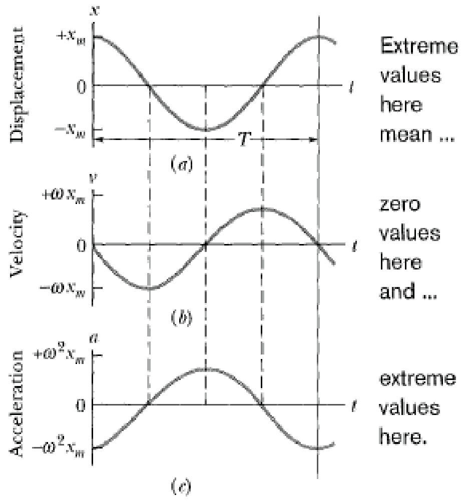


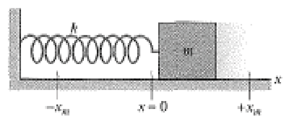
Fig. 15-4 (*a*) The displacement $x(t)$ of a particle oscillating in SHM with phase angle ϕ equal to zero. The period T marks one complete oscillation. (*b*) The velocity $v(t)$ of the particle. (*c*) The acceleration $a(t)$ of the particle.

2. De krachtwetten voor een eenparige harmonische beweging

Nu we de versnelling kennen, kunnen we via de wet van Newton de kracht uitgeoefend op het trillend deeltje berekenen:

$$F = m \cdot a \Leftrightarrow F = -(m\,\omega^2)x$$

Hierin herkennen we duidelijk de wet van Hoek voor een veer:



$$F = -kx$$

Met k de veerconstante:

$$k = m\omega^2$$

De Eenparige Harmonische Beweging is de beweging uitgevoerd door een massadeeltje veroorzaakt door een kracht die proportioneel is met de uitwijking van het deeltje, maar met tegengesteld teken.

Een veer is een voorbeeld van een **lineaire EHB**:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Een trillend systeem bestaat steeds uit:

- Een verende component gekenmerkt door veerconstante k: verhoogt de hoekfrequentie
- Een weerstand of massa m: verlaagt de hoekfrequentie

In het systeem hier afgebeeld zijn die componenten respectievelijk de massaloze veer en het blok.

3. Energie in een eenparige harmonische beweging

De mechanische energie van een trillend systeem gaat over van potentiële energie naar kinetische energie, maar de totale hoeveelheid mechanische energie blijft constant over de tijd.

<u>Potentiële energie</u> hangt af van de verende component

$$E_{pot}(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kX_m^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

<u>Kinetische energie</u> hangt af van de snelheid van de weerstand of massacomponent

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2X_m^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

<u>Totale mechanische energie</u>

$$E = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2}kX_m^2\cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}m\omega^2X_m^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

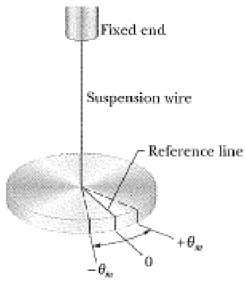
$$\Leftrightarrow E = \frac{1}{2}kX_m^2\left[\cos^2(\omega t + \phi) + \frac{m\omega^2}{k}\sin^2(\omega t + \phi)\right] \Leftrightarrow E = \frac{1}{2}kX_m^2[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)]$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{1}{2}kX_m^2$$

Merk duidelijk op dat de totale mechanische energie niet afhankelijk is van de tijd.

De verende component zorgt voor de opslag van potentiële energie, de massacomponent voor de opslag van kinetische energie.

4. eenparige harmonische hoektrilling



Als we deze plaat een hoekuitwijking θ geven, dan zal de plaat beginnen draaien, trillen, tussen $\pm\theta$.

Het draaimoment dat deze trilling veroorzaakt wordt gegeven door:

$$\tau = -\kappa\theta$$

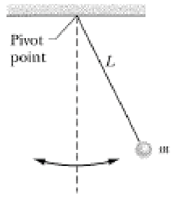
Dit is de hoek vorm van de wet van Hoek: κ is de equivalente van de veerconstante k. De equivalente van de massa m is het traagheidsmoment I. We krijgen dan dat:

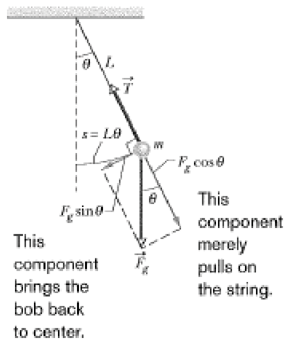
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

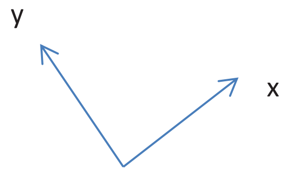
5. Slingers

Bij slingers kan de veercomponent in verband gebracht worden met de zwaartekracht i.p.v. met een fysieke component zoals een veer of touw.

5.1. De eenparige slingerbeweging







We nemen een bal met massa m en hangen die op aan een massaloos touw met lengte L. We geven de bal een kleine uitwijking θ t.o.v. de neutrale positie en laten dan los. Een eenparige slingerbeweging ontstaat.

Op de bal spelen volgende krachten in:

- De trekkracht $\vec{T}$ van het touw
- De zwaartekracht $\vec{F_g}$

We kunnen de zwaartekracht ontbinden in:

- Een component volgens de y-richting: $F_g \cos\theta$: heft $\vec{T}$ op
- Een component volgens de x-richting: $-F_g \sin\theta$: kracht die zorgt voor beweging

We weten uit het verleden (mechanica) dat de hoekversnelling gegeven wordt door:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \vec{a_t} = l \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

We kunnen dan de wet van Newton toepassen:

$$F = m \cdot \vec{a_t} \Leftrightarrow F = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Dit moet gelijk zijn aan de resulterende kracht op de bal: $-F_g \sin\theta = -mg\sin\theta$:

$$-mg\sin\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Deze differentiaalvergelijking kunnen we herschrijven naar standaard vorm:

$$-g\sin\theta = l\frac{d^2\theta}{dt^2} \Leftrightarrow l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Voor zeer kleine hoeken θ (in rad) geldt dat $\sin\theta \approx \theta$ (vb. $\theta = 5° = 0{,}0873\ rad$; $\sin 5° = 0{,}0872$)

We krijgen dan:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Of naar analogie met een lineaire veer:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0}$$

Waarin

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

We hebben nu een lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde met constante coëfficiënten die we gaan oplossen via de methode van de karakteristieke vergelijking:

- Karakteristieke vergelijking:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -\omega^2 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{-\omega^2} \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{\omega^2 i^2} \Leftrightarrow \lambda = \pm\omega i$$

- Homogene vergelijking:

$$\theta_H = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Met $A, B \in \mathbb{R}$ te bepalen via randvoorwaarden

- Particuliere vergelijking: *(geen want $Q(t) = 0$)*

We bekomen dus als algemene oplossing:

$$\theta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

5.2. De fysische slinger

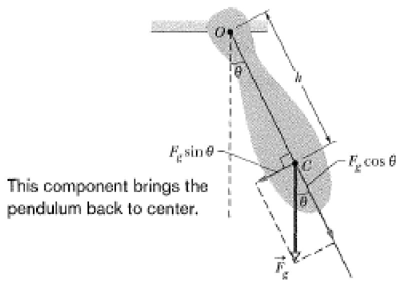


Fig. 15-10 A physical pendulum. The restoring torque is $hF_g \sin\theta$. When $\theta = 0$, center of mass C hangs directly below pivot point O.

We nemen nu een willekeurige slinger en hangen hem op. De fysische slinger heeft een massa m en de afstand tussen zijn zwaartepunt en het ophangpunt is h. We geven de slinger weer een kleine uitwijking θ, waardoor een trillende beweging ontstaat.

De krachten die inwerken op het zwaartepunt van de slinger zijn:

- De trekkracht $\vec{T}$
- De zwaartekracht $\vec{F}_g$, ontbindbaar in:
    - Component volgens y-as: $F_g \cos\theta$ die $\vec{T}$ compenseert
    - Component volgens x-as: $-F_g \sin\theta$ die de beweging veroorzaakt

Als we de wet van Newton voor draaimomenten toepassen dan krijgen we dat het moment M:

$$\vec{M} = -I\alpha$$

Met I het traagheidsmoment langs de rotatie-as en α de hoekversnelling.

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Het moment wordt dus:

$$\vec{M} = -I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Dit moet gelijk zijn aan het moment dat door de rotatie-as loopt:

$$M = \left|\vec{r} \times \vec{F}_g\right| = mgh\sin\theta$$

Stellen we beiden gelijk dan krijgen we:

$$-I\frac{d^2\theta}{dt^2} = mgh\sin\theta \Leftrightarrow mgh\sin\theta + I\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\sin\theta = 0$$

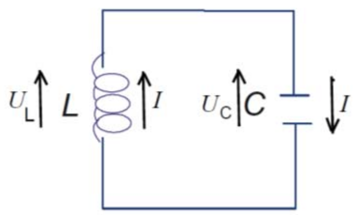
Voor kleine hoeken θ geldt dat $\sin\theta \approx \theta$. We krijgen dan een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Met

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}}$$

6. De elektrische LC kring



Condensator: $q = C \cdot U_c \Leftrightarrow U_c = \frac{q}{C}$

Zelfinductie van de spoel (wet van Lenz): $U_L = -L\frac{di}{dt}$

De definitie van stroom stelt dat: $i = \frac{dq}{dt}$

Invullen in de wet van Lenz geeft dan:

$$U_L = L\frac{d^2q}{dt^2}$$

Toepassing van de wet van Kirchoff geeft:

$$U_L + U_C = 0 \Leftrightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Dit geeft volgende differentiaalvergelijking:

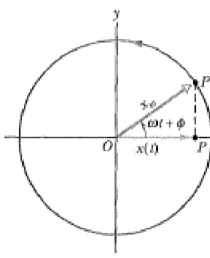
$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0$$

Met

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

7. Eenparige harmonische beweging en een parige cirkelbeweging

Een eenparige harmonische beweging is de projectie van een eenparige cirkelvormige beweging op de diameter van de cirkel waarin de cirkelvormige beweging plaats vindt.



P' is een deeltje dat een eenparige cirkelvormige beweging uitoefent tegen hoeksnelheid ω. De straal van de cirkelbaan is X_m en op tijdstip t maakt de plaatsvector van P' een hoek van $\omega t + \phi$ met de x-as.

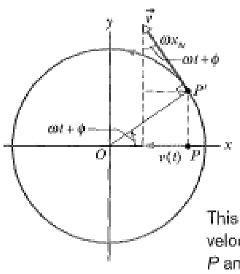
We projecteren nu P' en haar plaatsvector op de x-as (diameter van de cirkel). De plaatsvector geeft ons de positie $x(t)$ van het punt P.

Toepassing van goniometrie leert ons dat:

$$\cos(\omega t + \phi) = \frac{x(t)}{X_m} \Leftrightarrow x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

De projectie van P', P maakt dus inderdaad een eenparige harmonische beweging.

Hetzelfde kunnen we doen voor de snelheid en de versnelling:

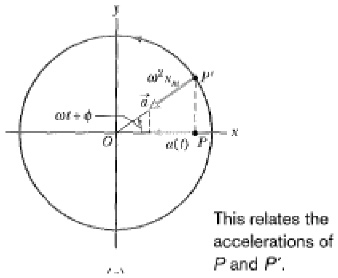


de snelheid van P' is $|\vec{v}| = \omega X_m$

projectie naar de x-as geeft:

$$v(t) = -(\omega X_m)\sin(\omega t + \phi)$$

(hoek met x-as is $\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}$ dus sin ipv cos. Snelheidsvector in negatieve zin).

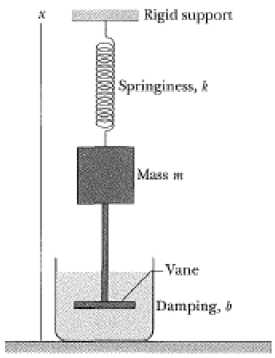


de versnelling van P' is $|\vec{a}| = \omega^2 X_m$

projectie naar de x-as geeft:

$$a(t) = -(\omega^2 X_m)\cos(\omega t + \phi)$$

8. Gedempte trillingen (trillingen met wrijving)



<u>VOORBEELD 1</u>

We nemen een blok met massa m en hangen het aan een veer met veerconstante k. Aan het blok zelf hangen we een gewichtloze pendel die in een vloeistof zweeft. (we maken abstractie van de zwaartekracht)

Op het blok werkt de veerkracht in:

$$F_v = -kx$$

De vloeistof zorgt voor een extra wrijvingskracht op het systeem:

$$F_w = -bv$$

Deze kracht werkt de beweging tegen (vandaar het minteken), is afhankelijk van de eigenschappen van de vloeistof (uitgedrukt in weerstandscoëfficiënt b) en is gerelateerd aan de snelheid v.

De wet van Newton zegt dat:

$$\sum F_i = m \cdot a$$

$$\Leftrightarrow F_v + F_w = m \cdot a \Leftrightarrow -kx - bv = m \cdot a$$

Hierin kunnen we de snelheid en versnelling vervangen door hun definities zodat we kunnen komen tot een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten:

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow \boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0}$$

Deze differentiaalvergelijking lossen we op via de methode van de karakteristieke vergelijking:

- ⇨ Karakteristieke vergelijking:

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{b^2 - 4mk}$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{4mk}{4m^2}} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Voor een kleine wrijvingscoëfficiënt geldt dat:

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m} \Rightarrow \left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0$$

We stellen:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

We krijgen dan:

$$\lambda = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{-\omega^2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\omega^2 i^2} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{b}{2m} \pm \omega i$$

⇨ Homogene vergelijking:

$$x_H = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos\omega t + Be^{-\frac{b}{2m}t}\sin\omega t$$

Met $A, B \in \mathbb{R}$ te bepalen via randvoorwaarden

⇨ Particuliere vergelijking: *(geen)*

We bekomen als algemene oplossing:

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos\omega t + Be^{-\frac{b}{2m}t}\sin\omega t$$

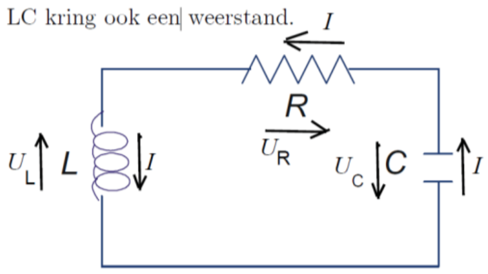
Wat leidt tot de eindoplossing:

$$x(t) = X_m e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$$

Met $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$

VOORBEELD 2

We voegen aan de eerdere LC kring een weerstand toe:



We passen de wet van Kirchoff toe:

- Zelfinductie van de spoel: $U_L = L\frac{di}{dt}$
- Weerstand: (wet van Ohm): $U_R = R \cdot i$
- Condensator: $U_C = \frac{q}{C}$

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0$$

Hierin vervangen we de stroom door haar definitie: $i = \frac{dq}{dt}$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

9. Gedwongen trillingen en resonantie

Wanneer iemand op een schommel schommelt dan maakt hij een *vrije trillende beweging*. Als iemand de schommel duwt dan spreken we van een *gedwongen trilling*. Een externe bron beïnvloedt de beweging.

Bij een gedwongen trilling zijn er twee hoekfrequenties:

- natuurlijke hoekfrequentie ω (hoekfrequentie die zou gelden bij een vrije trilling)
- uitwendige hoekfrequentie ω_d

Voor een gedwongen trilling geldt:

$$x(t) = X_m \cos(\omega_d t + \phi)$$

De snelheid van de trillingen (en bij benadering ook de uitwijking X_m) is maximaal als:

$$\omega = \omega_d$$

Dit verschijnsel noemt men resonantie: de externe bron laat het systeem trillen aan haar eigenfrequentie.

De uitwijking X_m is een functie van de wrijvingscoëfficiënt b.

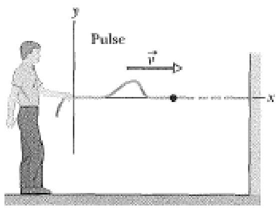
Golven

1. Types golven

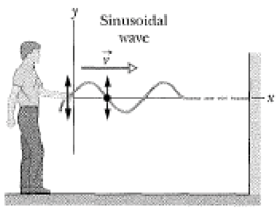
Er zijn drie types van golven:

1) **Mechanische golven** (water, geluid, seismografisch, …)
   - Gedragen zich volgens de wetten van Newton
   - Hebben een medium nodig om zich voort te planten (water, lucht, gesteente)
2) **Elektromagnetische golven** (licht, radio- en tv-golven, microgolven, radargolven, x-stralen,…)
   - Hebben geen medium nodig (vacuüm)
   - Planten zich voort aan de lichtsnelheid $c = 3 \cdot 10^8 m/s$
3) **Materiegolven** (kwantummechanisch: elektronen, protonen, …)

2. Transversale en longitudinale golven



(a)



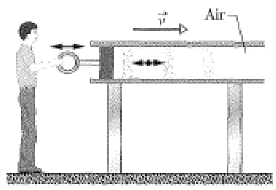
(b)

__Transversale golven__

Uitwijking loodrecht op bewegingsrichting.

Stel je beweegt het uiteinde van een gespannen touw op en neer. Het eerste stukje touw trekt het volgende naar boven en daarna weer naar beneden en zo verder. Het gevolg is een golfbeweging die zich voortplant langs het touw.

__Longitudinale golven__



Uitwijking langs de bewegingsrichting.

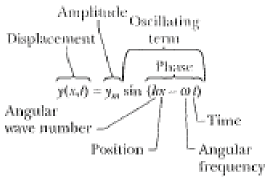
Stel je beweegt een zuiger in en uit een koker. Hierdoor verplaatst er zich lucht doorheen de koker ten gevolge van een drukverandering en ontstaat er geluid.

In beide gevallen gaat het om de golf die zich voortplant, de materie zelf blijft ter plaatse

3. Golflengte en frequentie

De uitwijking van een golf op een bepaald tijdstip t en op positie x wordt gegeven door:

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$



3.1. Amplitude en fase

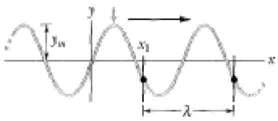
y_m is de amplitude:

Maximale uitwijking t.o.v. evenwichtstoestand v/e deeltje wanneer de golf daar passeert

$(kx - \omega t)$ is de fase:

Lineaire functie van de tijd: beschrijft de trilling van een deeltje ten gevolge van het passeren van de golf doorheen de tijd.

3.2. Golflengte en golfgetal



golflente λ = afstand tussen twee gelijke vormen van de golf

Aan uiteinde golflente is uitwijking y is gelijk: op $x = x_1$ en $x = x_1 + \lambda$

Beschouw een vaste tijd $t = 0$:

$$y(x_1, 0) = y_m \sin(kx_1) = y_m \sin\big(k(x_1 + \lambda)\big)$$

$$\Leftrightarrow kx_1 = k(x_1 + \lambda) - 2\pi \Leftrightarrow kx_1 - kx_1 + k\lambda = 2\pi \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

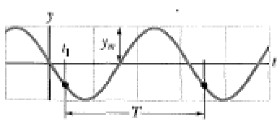
k is het golfgetal

3.3. Periode, hoekfrequentie en frequentie

Beschouw een vaste positie $x = 0$:

$$y(0,t) = y_m \sin(-\omega t) = -y_m \sin(\omega t)$$

Elk deeltje x waar de golf passeert beschrijft een eenparige harmonische beweging (trilling).



Periode T = tijd waarin een deeltje een volledige trilling uitvoert

De uiteinden van dit tijdsinterval hebben een gelijke uitwijking y

$$y(0,t) = -y_m \sin \omega t = -y_m \sin \omega(t + T)$$

$$\Leftrightarrow \omega t = \omega(t + T) - 2\pi \Leftrightarrow \omega t - \omega t + \omega T = 2\pi \Leftrightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

ω is de hoekfrequentie / hoeksnelheid, uitgedrukt in rad/s