1ste bach TEW

Wiskunde

Definities en bewijzen / Prof. De Schepper / 1ste & 2de semester

Quickprinter
Koningstraat 13
2000 Antwerpen
www.quickprinter.be

4,20 €

Binomium Newton

Definitie Faculteiten

$Voor\ n \in \mathbb{N}$ geldt

$$n! = n * (n-1) * \dots * 2 * 1 \qquad voor\ n \neq 1$$

0! = 1

Definitie Combinaties

$Voor\ n, k \in \mathbb{N}\ met\ k \leq n\ geldt$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad voor\ n \neq 1$$

Stelling Binomium van Newton

$Voor\ a, b \in \mathbb{R}\ en\ n \in \mathbb{N}\ geldt$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

De coëfficiënten bij de machten van a en b in deze uitdrukking noemt men binomiaalcoëfficiënten.

$vb: voor\ n = 3: \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

Verband tussen beide coördinatenstelsels

$De\ omzettingsformules\ tussen\ beide\ soorten\ coördinaten\ zijn\ de\ volgende$:

$$\begin{cases} x = r cos\varphi \\ y = r sin\varphi \end{cases}$$

en

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Definitie Complexe Getallen

We definiëren i als het “getal” waarvoor geldt: $i^2 = -1$.
Met deze definitie wordt de verzameling van de complexe getallen dan gedefinieerd als de verzameling van alle lineaire combinaties van reële getallen en dit “getal” i, of

$$\mathbb{C} = \{a + b * i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

In de notatie $a + b * i\ noemt\ men\ a\ het\ reële\ deel\ en\ b * i\ het\ imaginaire\ deel.$

Definitie Toegevoegd Complex Getal

$Men\ definieert\ het\ toegevoegd\ complex\ getal\ van\ a + b * i\ als$

$$\overline{a + b * i} = a - b * i$$

Definitie Goniometrische of Polaire vorm

Een complex getal $a + b \cdot i$ kan in het complexe vlak meetkundig voorgesteld worden door het punt met:

- Cartesische coördinaten (a, b), of
- Poolcoördinaten (r, φ) bepaald door

$$\begin{cases} a = rcos\varphi \\ b = rsin\varphi \end{cases}$$

$$met\ r \geq 0\ en\ 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Er geldt

$$a + b \cdot i = r(cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$$

Het rechterlid noemt men de goniometrische of polaire vorm van het complexe getal.

Eigenschap Formule van De Moivre

$Voor\ elk\ complex\ getal\ met\ modulus\ 1\ geldt$

$$(cos\varphi + i \cdot sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Methode Toepassing De Moivre

Om de n-de macht te bepalen van een willekeurig complex getal, stap je best over op de goniometrische vorm.
Als

$$a + b \cdot i = r \cdot (cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$$

dan is

$$(a + b \cdot i)^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Definitie Kapitalisatie

Wanneer je een startkapitaal A gedurende n jaar belegt aan een jaarlijkse intrestvoet r, dan kan het eindbedrag na n jaar berekend worden als

$$S = A \cdot (1 + r)^n$$

Dit bedrag noemt men het gekapitaliseerde bedrag of de slotwaarde of eindwaarde.
Men gebruikt meestal de notatie u = 1 + r voor de kapitalisatiefactor.

Definitie Actualisatie

Om na een belegging gedurende n jaar aan een jaarlijkse intrestvoet r een eindbedrag S te bereiken, moet gestart worden met een kapitaal gelijk aan

$$A = S \cdot (1+r)^{-n}$$

Dit bedrag noemt men het geactualiseerde bedrag of de aanvangswaarde of beginwaarde.
Men gebruikt meestal de notatie $v = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{u} voor\ de\ actualisatiefactor$

Definitie Functie

Een reële functie f is een voorschrift dat aan elk element van een verzameling $A \subset \mathbb{R}$ (domein of definitiegebied) een element van een verzameling $B \subset \mathbb{R}$ (bereik of beeldgebied) toekent.
Notatie:

$$f: A \rightarrow B : x \mapsto f(x)$$

of

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$$

Definitie Even - Oneven

Een reële functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ is een even functie, indien voor elke waarde x uit het domein geldt:

f(x) = f(-x)

De grafiek van de functie is symmetrisch ten opzichte van de Y-as

Een reële functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ is een oneven functie, indien voor elke waarde x uit het domein geldt:

f(x) = -f(-x)

De grafiek van de functie is symmetrisch ten opzichte van de oorsprong.

Definitie Samengestelde Functie

Een reële functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ is een samenstelling van functies $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x)$ na $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto h(x)$, of

$$f = g \circ h$$

Indien voor elke waarde van x geldt   f(x) = g(h(x))

Definitie Inverse Functie

Een reële functie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x)$ is de inverse functies van $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$, indien voor elke waarde y uit het domein van f geldt:

$$f(y) = x \Leftrightarrow g(x) = y$$

Meestal noteert men de inverse functie als g = f^{-1}
De beeldlijnen van de functies f en f^{-1} zijn gespiegeld ten opzichte van de eerste bissectrice.

Eigenschap Invers

Voor een eenduidige en eenwaardige reële functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ geldt:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \qquad en \qquad f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

Definitie Stuksgewijs gedefinieerde functie

Een reële functie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x)$ is een stukgewijs gedefinieerde functie indien het voorschrift verschilt voor verschillende delen van het domein van de functie.

Definitie Lineaire functie

Een lineaire functie of affiene functie heeft voorschrift $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = mx + q$.
Een lineaire functie wordt grafisch voorgesteld door een rechte.

De waarde m is de rico of helling van de functie.
De waarde q bepaalt het snijpunt van de beeldlijn van de functie met de Y-as.

Definitie Absolute waarde functie

De absolute waarde functie associeert met elk reëel getal zijn absolute waarde:

$$abs: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto abs(x) = |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

Definitie Grootste Gehele Waarde functie

De grootste gehele waarde functie associeert met elk reëel getal het grootste gehele getal dat niet groter is dan het beschouwde getal:

$$ggw: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto ggw(x) = [x] = max\{y \in \mathbb{Z} : y \leq x\}$$

Definitie Veeltermfunctie

Een veeltermfunctie van graad n heeft voorschrift

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Met $n \in \mathbb{N}$ *en met* $a_0, a_{1,} \cdots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0.$

Een veeltermfunctie heeft als domein de gehele reële as, en wordt grafisch voorgesteld door een gladde éénwaardige kromme.

Definitie Parabool

De vergelijking

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2$$

Met $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ *en* $a \in \mathbb{R}_0$, *beschrijft een parabool*
De top van deze parabool heeft coördinaten (x_0,y_0).
De symmetrie-as is evenwijdig aan de Y-as en heeft vergelijking $x = x_0$.
De parabool heeft de holle zijde naar boven indien a > 0, naar beneden indien a < 0.

Definitie Rationale Functie

Een veeltermfunctie van graad n heeft voorschrift

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{n-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Met $n, m \in \mathbb{N}$ *en met* $a_0, a_1, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_m \in \mathbb{R}$

Het domein van een rationale functie is de reële as verminderd met de waarden waarvoor de noemer nul wordt.

Definitie Irrationale Functie

Een irrationale functie heeft een voorschrift waarin een of meer wortelvormen voorkomen. Het domein van een irrationale functie is beperkt tot dat deel van de reële as waarvoor het argument onder de wortel het juiste teken bezit.

Definitie Cirkel

De impliciete vergelijking

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Met $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ *en* $r \in \mathbb{R}_0^+$ *beschrijft een cirkel*

Het middelpunt van deze cirkel heeft coördinaten (x_0,y_0) ; de straal is r.

Eigenschap Sinusfunctie

De sinusfunctie $sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$

- *Is positief voor hoeken uit het eerste en tweede kwadrant, en negatief voor hoeken uit het derde en vierde kwadrant;*
- *Heeft domein* $\mathbb{R}$ *en bereik* $[-1, 1]$ *;*
- *Is éénwaardig en meerduidig*
- *Is een oneven functie;*
- *Is een periodische functie met periode* 2π

Eigenschap Cosinusfunctie

De cosinusfunctie $cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$

- *Is positief voor hoeken uit het eerste en vierde kwadrant, en negatief voor hoeken uit het tweede en derde kwadrant;*
- *Heeft domein* $\mathbb{R}$ *en bereik* $[-1,1]$ *;*
- *Is éénwaardig en meerduidig*
- *Is een even functie;*
- *Is een periodische functie met periode* 2π

Eigenschap Tangensfunctie

De tangensfunctie $tan: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \tan(x)$

- *Is positief voor hoeken uit het eerste en derde kwadrant, en negatief voor hoeken uit het tweede en vierde kwadrant;*
- *Heeft domein* $\mathbb{R} \setminus \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ *en bereik* $\mathbb{R}$ *;*
- *Is éénwaardig en meerduidig*
- *Is een oneven functie;*
- *Is een periodische functie met periode* π

Waarden van sinus, cosinus en tangens.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0

Definitie Boogsinusfunctie

De boogsinusfunctie is de inverse van de sinusfunctie.

De gewone boogsinusfuctie bgsin wordt gedefinieerd als y=bgsin(x) ⇔ x=sin(y).

- De hoofdwaarde Bgsin wordt gedefinieerd als y = Bgsin (x) ⇔ $\begin{cases} x = \sin(y) \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

Definitie Boogcosinusfunctie

De boogcosinusfunctie is de inverse van de cosinusfunctie.

De gewone boogcosinusfuctie bgcos wordt gedefinieerd als y=bgcos(x) ⇔ x=cos(y).

De hoofdwaarde Bgcos wordt gedefinieerd als y = Bgcos (x) ⇔ $\begin{cases} x = \cos(y) \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$

Definitie Boogtangensfunctie

De boogtangensfunctie is de inverse van de tangensfunctie.

De gewone boogtangensfuctie bgtan wordt gedefinieerd als y=bgtan(x) ⇔ x=tan(y).

De hoofdwaarde Bgtan wordt gedefinieerd als y = Bgtan (x) ⇔ $\begin{cases} x = \tan(y) \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

Eigenschap Boogsinusfunctie (Bgsin)

De functie bgsin : R→ R: x → bgsin(x)
- Heeft domein [-1, 1] en bereik R
- Is meerwaardig en éénduidig

De functie Bgsin : R → R: x → Bgsin(x)
- Heeft domein [-1, 1] en bereik [-π/2, π/2]
- Is éénwaardig en éénduidig

Eigenschap Boogcosinusfunctie (Bgcos)

De functie bgcos : R→ R: x → bgcos(x)
- Heeft domein [-1, 1] en bereik R
- Is meerwaardig en éénduidig

De functie Bgcos : R → R: x → Bgcos(x)
- Heeft domein [-1, 1] en bereik [0, π]
- Is éénwaardig en éénduidig

Eigenschap Boogtangensfunctie (Bgtan)

De functie bgtan : R→ R: x → bgtan(x)
- Heeft domein R en bereik R\{(2n+1) π/2 : n ∈ Z}
- Is meerwaardig en éénduidig

De functie Bgtan : R → R: x → Bgtan(x)
- Heeft domein [-1, 1] en bereik]-π/2, π/2[
- Is éénwaardig en éénduidig

Definitie Exponentiële functie

Een exponentiële functie heeft voorschrift

$$\exp_a : R \to R_0^+ : x \to \exp_a(x) = a^x, \text{ met } a \in R^+\backslash\{0,1\}.$$